9- حل المسألة الحدية:

عند حل المسألة الحدية الخطية كثيراً ما نلجأ للطريقة التالية:

إذا كانت معطاة لدينا المعادلة التفاضلية (1) العامة مع الشرطين الحديين (2) فإن حل المسألة الحدية هذه يكون:

$$y = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x) \qquad [8]$$

حيث أن الدوال $v(x)$ و $u(x)$ و $y_0(x)$ هي مستخرجة من مسائل كوشي الثلاث على الترتيب:

شرط بنقطة واحدة

$$\left.\begin{array}{lll} [I] & L(y) = f(x) & ; \; y(a) = y'(a) = 0 \\ [II] & L(y) = 0 & ; \; y'(a) = 0 \quad y(a) = 1 \\ [III] & L(y) = 0 & ; \; y'(a) = 1 \quad y(a) = 0 \end{array}\right\} \quad [9]$$

تشكل مسائل كوشي بنقطة واحدة من المعادلة المعطاة $L(y) = f(x)$

ثم نضع الشروط الحدية [2] المعطاة في علاقة الحل [8] الناتجة فنحصل على معادلتين تاليتين من أجل تحديد الثوابت α و β.

مثال: أوجد حل المسألة الحدية التالية:

$$x y'' - y' = \frac{3}{x^2} \quad \text{--- (1)}$$

مع الشروط الحدية:

$$[y(1) = y'(1) \qquad 3y(2) - 2y'(2) = 3] \quad \text{--- (2)}$$

حيث نلاحظ $a = 1$ ، $b = 2$

الحل: سوف نبحث عن حل لهذه المسألة بالشكل:

$$y = y_0(x) + \alpha\, u(x) + \beta\, v(x) \quad (*) \quad ; \; y = y(x)$$

حيث $v(x)$ و $u(x)$ و $y_0(x)$ هي حلول مسائل كوشي الثلاث التالية على الترتيب:

مسائل كوشي الثلاث مع نقطة واحدة

$$\left.\begin{array}{lll} [I] & x y'' - y' = \frac{3}{x^2} & ; \; y(1) = y'(1) = 0 \\ [II] & x y'' - y' = 0 & ; \; y(1) = 1 \;,\; y'(1) = 0 \\ [III] & x y'' - y' = 0 & ; \; y(1) = 0 \;,\; y'(1) = 1 \end{array}\right.$$

بحل كل مسألة من هذه المسائل الثلاث نجد الحلول هي:

$[I] \Rightarrow y_0(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x}$ (حل المسألة الأولى)

$[II] \Rightarrow u(x) = 1$ (حل المسألة الثانية)

$[III] \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ (حل المسألة الثالثة)

نعوض الآن في الحل المفروض (*) فنجد:

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1)$$

وهو الحل العام المطلوب

. نعين الثابتين α و β بحيث يحقق هذا الحل الشرط الحدي ② في المسألة المعطاة :

. نعوض (بالملاحظة) الحل هذا والشرط الحدي ② للمسألة المعطاة فنحصل على معادلتين

. لتعيين α و β بهذا الشكل　$6\alpha+\beta=7$　　$\alpha=\beta$

بالحل المشترك $\Rightarrow$　$\alpha=\beta=1$

. ثم نعوض في الحل المطلوب :

$$y=\frac{1}{2}(x^2-3)+\frac{1}{x}+1+\frac{1}{2}(x^2-1)$$

$$=x^2+\frac{1}{x}-1$$ وهو الحل المطلوب

. وبحل مسائل كوشي فردية :

جسماً لـ [1] لحل مسألة كوشي الأولى :　$xy''-y'=\frac{3}{x^2}$ — [1]

. حيث الشرط الحدي　$y(1)=y'(1)=0$ — [2]

. لإيجاد الحل الموافق لمسألة كوشي المعطاة هذه أولاً نكتب المعادلة [1] بالشكل :

$$y''-\frac{y'}{x}=\frac{3}{x^3} \quad [3]$$ (خذ مثال "y")

. لحلها نأخذ المتجانسة فيها :

$$y''-\frac{y'}{x}=0 \Rightarrow$$

. لحلها نفرض أن $y'=Z$ (تخفيض رتبة المعادلة) وتكون المعادلة بالشكل

$$Z'-\frac{Z}{x}=0 \Rightarrow$$ بفصل المتغيرات والمكاملة

$$Z'=\frac{Z}{x} \Rightarrow \frac{dZ}{dx}=\frac{Z}{x}$$

$$\frac{dZ}{Z}=\frac{dx}{x}$$ (منفصلة المتغيرات)

. بمكاملة الطرفين :

$$\ln Z=\ln cx$$

. بنزع اللوغاريتم من الطرفين :

$$\boxed{Z=cx} \Rightarrow y'=cx \xrightarrow[\text{بفصل المتغيرات}]{y'=\frac{dy}{dx}} dy=cx\,dx$$

. بالمكاملة

$$\boxed{y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2}$$ وهو الحل العام للمتجانسة.

ونلاحظ أن $y=\frac{1}{x}$ حل خاص لغير المتجانسة من [3] — جرب بنفسك

والحل العام المطلوب:

$$y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2 + \frac{1}{x} \quad \text{--- } (*')$$

ولحساب c_1 و c_2 من خلال المعادلة الحل الناتج (*) مع الشروط الحدية [2] لكوشي

يكون لحساب c_1 و c_2 كما يلي:

$$(*') \Rightarrow y(1) = c_1 \times \frac{1}{2} + c_2 + 1 = 0$$

$$c_1 = -2 - 2c_2 \quad \text{--- } [4]$$

ولحساب c_2 نشتق (*) مرة بالنسبة لـ x فنجد:

$$(*') \Rightarrow y' = c_1 x + 0 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{المشتقة نجد}$$

$$y'(1) = c_1 - 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 1$$

ومن (4) السابقة نجد:

$$2c_2 = -2 - c_1 \Rightarrow c_2 = -1 - \frac{c_1}{2} \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{2}$$

نعوض قيمة c_1 و c_2 الناتجين في (*) فيكون:

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{x}$$

أو

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x}$$

وهو المطلوب (حيث $y = y_0(x)$)

مسألة [II] لدينا مسألة كوشي [II] (نضع u بدل y)

$$x u'' - u' = 0 \quad \text{--- } [1]$$

والشرط

$$u(1) = 1 \qquad u'(1) = 0 \qquad [2]$$

بإيجاد الحل الوافق

أن حل المتجانسة [1] هو من الشكل (معروف من السابق)

الحل العام للمعادلة [1]

$$u(x) = c_1\frac{x^2}{2} + c_2 \quad \text{--- } [3]$$

ولحساب c_1 و c_2 من الشروط المعطاة [2] كما يلي:

$$[3] \Rightarrow u(1) = c_1 \times \frac{1}{2} + c_2 = 1 \Rightarrow$$

$$c_1 = 2(1 - c_2) \quad \text{--- } [4]$$

وحساب C_2 نشتق [3] مرة بالنسبة لـ x نجد :

[3] $\Rightarrow u' = C_1 x \Rightarrow$ بالمعادلة

$u'(1) = C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$\boxed{C_2 = 1}$

وبالتالي [4] نجد أن

والحل الموافق

[3] $\Rightarrow \boxed{u(x) = 1}$

وهو المطلوب.

مسألة [II] لدينا مسألة كوشي [II] (نضع v بدل u)

$x v'' - v' = 0$ ... [1]

$[v(1) = 0 \quad v'(1) = 1]$ ... [2]

إن حل المتجانسة [1] هو من الشكل (كما وجدناه سابقاً)

$v(x) = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ ... [3]

ولحساب C_1 و C_2 من خلال الشرط المعطى [2] في المسألة (كوشي)

[3] $\Rightarrow v(1) = C_1 \times \frac{1}{2} + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -2C_2}$ ... [4]

ولحساب C_2 نشتق العلاقة [3] علاقة الحل وبالمعادلة يكون :

$v'(x) = C_1(x) \xrightarrow{\text{بالمعادلة}} v'(1) = C_1 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

ومن [4] نحسب C_2 كما يلي :

[4] $\Rightarrow 1 = -2C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{1}{2}}$

والحل المطلوب لمسألة كوشي [3] يكون بالشكل :

[3] $\Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

أو $\boxed{v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)}$

وهو المطلوب.

والآن بالعودة للتعويض في علاقة الحل (*) :

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1)$ (**)

الحل العام للمسألة الحدية.

ولتعيين α و β الاختياريتين هنا بحيث تحقق هذا الحل الشرط الحدي للمسألة المعطاة (2) حيث:
$[y(1) \overset{I}{=} y'(1) \qquad 3y(2) \overset{II}{-} 2y'(2) = 3]$

نعوض هذا الحل في الشرط الحدي (2) للمسألة [(1) و(2)] فنحصل على معادلتين لتعيين α و β هما من الشكل:

الشرط (I) $\xrightarrow{\text{بالتعويض}}$ $\frac{1}{2}(1-3) + 1 + \alpha + \frac{\beta}{2}(1-1) = 1 - 1 + \beta$

حيث $y' = x - \frac{1}{x^2} + \beta x$

ومنه نجد أن (بعد الاختصار)

أي $\alpha = \beta$ ... (1)

الشرط (II) $\Rightarrow 3\left[\frac{1}{2}(4-3) + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{\beta}{2}(4-1)\right] - 2\left[2 - \frac{1}{4} + 2\beta\right] = 3$

ومنه

$$3\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{3}{2}\beta\right] - 4 + \frac{1}{2} - 4\beta = 3$$

$$\Rightarrow 3 + 3\alpha + \frac{9}{2}\beta - \frac{7}{2} - 4\beta = 3$$

بضرب بـ (2) للطرفين والتبسيط يكون:

$6\alpha + \beta = 7$ ... (2)

وبالحل المشترك لـ (1) و (2) نجد أن:

$\alpha = \beta = 1$

وبالتعويض عن قيم α و β في علاقة الحل (**) فيكون:

$$(**) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$
$$= x^2 + \frac{1}{x} - 1$$

حل المسألة الحدية المطلوب

وهو المطلوب.

مسألة 9: استخرج دالة غرين للمسألة الحدية التالية ثم اكتب صيغة الحل للمسألة بدلالة غرين:

$y'' = f(x)$ — ①

الشروط الحدية — ② $\quad -1 \le x \le +1 \;;\quad y|_{x=-1} = y|_{x=1} = 0$

الحل: ان الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة من ① هو من الشكل

$y'' = 0$

فلها $\boxed{y = c_1 + c_2 x}$ — ③

بالتكامل كمتغير نتج

$\frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = 0$

$\int dy' = \int dx \Rightarrow y' = c$

$\Rightarrow dy = c\,dx$

بالتكامل ينتج الحل ③

من أجل الحلين الخاصين، نلاحظ ان الحل الخاص الأول

من ③ $y_1(x) = 1 + x$

يحقق الشرط $y(-1) = 0$

من أجل $c_1 = c_2 = 1$

والحل الخاص الثاني $y_2(x) = 1 - x$

من أجل $c_2 = -1 \quad c_1 = 1$

ويحقق الشرط الثاني $y(1) = 0$

واضح نلاحظ أن أحد الحلين الخاصين لا يحقق بآن واحد الشرطين الحديين

إذن يمكن البحث عن دالة غرين بالشكل

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)(1+x) \;;\; -1 \le x \le s \\ \psi(s)(1-x) \;;\; s \le x \le 1 \end{cases}$$

حيث $\varphi(s)$ و $\psi(s)$ يتحددان من العلاقتين الآتيتين:

استمرار $\quad \psi(s)(1-s) = \varphi(s)(1+s)$

انقطاع $\quad -\psi(s) - \varphi(s) = 1$

وبالحل المشترك لهاتين المعادلتين نحصل على

$$\varphi(s) = -\frac{1-s}{2}$$

$$\psi(s) = -\frac{1+s}{2}$$

تأكد من ذلك

وبهذا الشكل نكتب دالة غرين:

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(1-s)(1+x) & ; \ -1\le x\le s\\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x) & ; \ s\le x\le 1\end{cases}$$

ويمكن ان نعبر عن حل للمسالة الحدية المعطاة بواسطة دالة غرين بالشكل:

$$y(x)=\int_{-1}^{+1}G(x,s)\,f(s)\,ds$$

$$=-\frac{1+x}{2}\int_{-1}^{x}(1-s)f(s)\,ds-\frac{1-x}{2}\int_{x}^{1}(1+s)f(s)\,ds$$

